Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :............................
NIM :............................
T.tangan:............................

Solusi Kuis ke-2 IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS) – Relasi dan Fungsi, Teori Bilangan
Dosen: Rinaldi Munir, Harlili
Senin, 13 Oktober 2014
Waktu: 55 menit

1. Terdapat matriks relasi sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Apakah matriks di atas bersifat :
   a. refleksif?
   b. setangkup?
   c. tolak setangkup?
   d. menghantarf?

Sebutkan alasannya!

Penyelesaian:
   a. Tidakrefleksif karena ada elemen pada diagonal utama yang bernilai 0
   b. Tidak setangkup, karena untuk (a,b)∈ R tidak berlaku (b,a)∈ R, hal ini dapat dilihat dari bentuk matriks yang tidak berbentuk pencerminan pada diagonalnya.
   c. Tolak setangkup, karena untuk (a,b)∈ R berlaku(b,a)∈ R jika dan hanya jika a=b, dapat dilihat dari bentuk matriks yang selalu berlawanan jika diambil garis di diagonalnya.
   d. Tidak menghantar, karena untuk (a,b)∈ R dan (b,c)∈ R, (a,c) belum tentu anggota R. Contohnya (1,3) ∈ R, (3,4) ∈ R tetapi (1,4) bukan anggota R

2. Di antara relasi-relasi berikut, tentukan manakah yang merupakan fungsi. Jika fungsi, tentukan apakah fungsi tersebut surjektif (pada), injektif (satu-ke-satu), atau bijektif (berkorespondensi satu-ke-satu).
   a. Relasi $Z \times Z$ di mana $(a, b) \in R$ jika dan hanya jika a habis membagi b.
   b. Relasi $Z \times Z$ di mana $(a, b) \in R$ jika dan hanya jika $a + b = 0$.
   c. Relasi $Z \times Z$ di mana $(a, b) \in R$ jika dan hanya jika $2a + b = 0$.

   Catatan: Z adalah himpunan seluruh bilangan bulat, $Z = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.

Penyelesaian:
   a. Relasi tersebut bukan fungsi karena sebuah nilai a dapat membagi banyak bilangan bulat lainnya.
   b. Relasi tersebut adalah fungsi $f(a) = -a$. Fungsi ini merupakan fungsi surjektif dan injektif, sehingga juga merupakan fungsi bijektif.
   c. Relasi tersebut adalah fungsi $f(a) = -2a$. Fungsi ini injektif karena jika $f(a) = f(b)$, maka $-2a = -2b \rightarrow a = b$. Namun, fungsi ini tidak surjektif karena tiap bilangan ganjil tidak ada dalam bayangan fungsi ini.

3. Carilah klosur menghantar *(transitive closure)* dari relasi $R = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,1)\}$.

Penyelesaian:

Matriks relasi R adalah $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Maka, klosur menghantar R adalah $M_R = M \vee M^{[2]} \vee M^{[3]}$.

$$M^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka, $M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Jadi, klosur menghantarnya adalah $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

4. Carilah *integer* *x* dan *y* yang memenuhi persamaan 34*x* + 412*y* = 2.

Penyelesaian:

412 = 12 . 34 + 4 (i)

34 = 8 . 4 + 2 (ii)

4 = 2 . 2 + 0 (iii)

Jadi PBB (412,34) = 2.

Persamaannomor (i) dan (ii) diubahmenjadi :

4 = 412 – 12 . 34 (iv)

2 = 34 – 8 . 4 (v)

Subtitusikanpersamaan (iv) kepersamaan (v) menjadi

2 = 34 – 8 (412 – 12 . 34)

2 = 97 . 34 – 8 . 412

Jadi 97 . 34 – 8 . 412 = 2, sehingga *x* = 97 dan *y* = – 8.

5. Jika diketahui bahwa $a \equiv b(mod\ m)$, dan terdapat sebuah bilangan d sehingga $d|m$, dan $d|a$, maka buktikanlah juga bahwa $d|b$.

Penyelesaian:

$a \equiv b(mod\ m)$ berarti $a = km + b$...........(1)

Dari $d|m$ berarti $m = k_1 d$..........................(2)

Dari $d|a$ berarti $a = k_2 d$...........................(3)

Substitusikan persamaan (2) & (3) ke dalam persamaan (1) menjadi :

$k_2 d = k(k_1 d) + b$

$b = (k_2 - kk_1)d$

$b = k_3 d$

Didapatkan bentuk $b = k_3 d$ yang sama dengan bentuk $d|b$, maka terbukti.

6. Hitunglah sisa pembagian dari 2^{2020} dibagi dengan 73. (Petunjuk: Gunakan Teorema Fermat $a^{p-1} \equiv 1$ (mod *p*))

Penyelesaian:

Denganmenggunakanteoremafermatkitadapatmengetahuibahwa $2^{72} \equiv 1$ (mod 73).

$2^{2020} \equiv (2^{72})^{28} . 2^4$ mod 73

$\equiv (1)^{28} . 2^4$ mod 73

$\equiv 2^4$ mod 73

$\equiv$ 16mod 73

Jadisisapembagiannyaadalah 16.

7. Berapakah angka terkecil yang habis dibagi 10, bersisa 2 jika dibagi 3, dan bersisa 3 jika dibagi 7.

Penyelesaian:

$x \equiv 0 \pmod{10} \rightarrow x = 10k_1$

$k_1 \equiv 2 \pmod{3} \rightarrow k_1 = 2 + k_2$

$10(2 + k_2) = 20 + 20k_2$

$k_2 \equiv 3 \pmod{7} \rightarrow k_2 = 3 + 7k_3$

$20 + 20(3 + 7k_3) = 80 + 140k_3$

$x \equiv 80 \pmod{140}$

Jadiangkanyaadalah 80